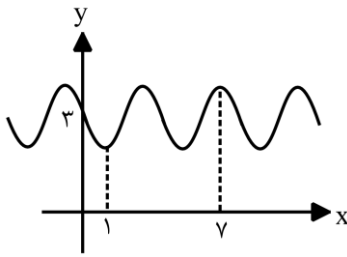


دوست مازی من! سلام

به جمع دوپینگی‌های کنکور ۹۹ خوش اومدی! تو این دوره قراره کل نکات ریاضی رو به شکل تست در کمترین حجم با صرف کمترین زمان و انرژی مرور کنیم. میخام براتون توضیح بدم که چطوری از دوره دوپینگ استفاده کنید:



۱- شکل رو به رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ می باشد، حاصل ab کدام است؟



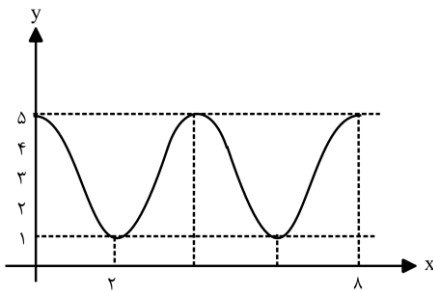
(۱) ۲

(۲) -۲

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) $-\frac{3}{2}$

۲- نمودار منحنی $f(x) = a \cos b\pi x + c$ مطابق شکل زیر است. $f(\frac{16}{3})$ کدام است؟



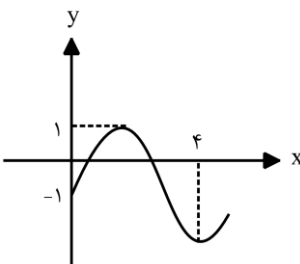
(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) $3 - \sqrt{3}$

(۴) $3 + \sqrt{3}$

۳- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin b\pi x - 1$ است. مقدار $a \times b$ کدام است؟



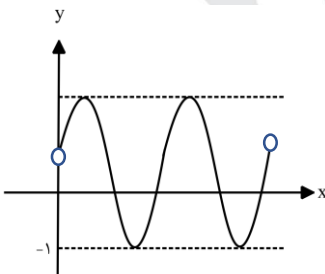
(۱) $-\frac{3}{2}$

(۲) $-\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۴) $\frac{3}{2}$

۴- شکل زیر نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + a \sin(b\pi x)$ ، در بازه $(0, \frac{2}{3})$ است. $a \times b$ کدام است؟



(۱) ۳

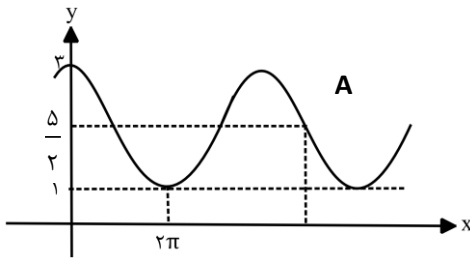
(۲) -۳

(۳) ۹

(۴) -۹

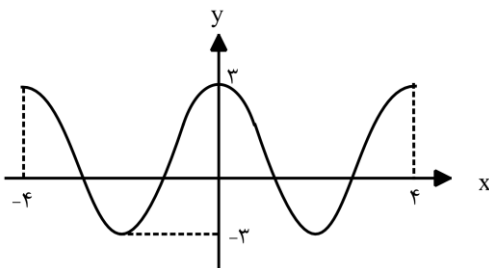


۵- نمودار تابع $y = a \cos bx + c$ به صورت زیر است. طول نقطه‌ی A کدام است؟



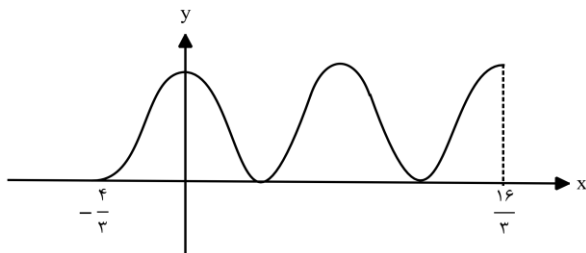
(۱) $\frac{25\pi}{6}$
(۲) $\frac{13\pi}{3}$
(۳) $\frac{14\pi}{3}$
(۴) $\frac{29\pi}{6}$

۶- اگر نمودار زیر قسمتی از تابع $f(x) = a \sin(\pi(\frac{1}{2} - bx))$ باشد، حاصل ab کدام است؟ ($b < 0$)



(۱) $-\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $-\frac{3}{4}$
(۴) $\frac{3}{4}$

۷- شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = 4 + a \cos(b\pi x)$ است.



حاصل $(a + 2b)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

(۱) -۱
(۲) ۱
(۳) -۲
(۴) ۲

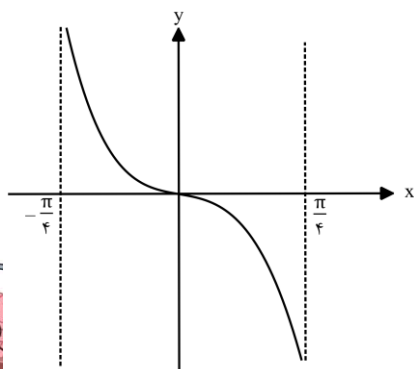
۸- کوچکترین دوره‌ی تناوب تابع $y = |\sin 4x| + |\cos 4x|$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{8}$
(۲) $\frac{\pi}{4}$
(۳) $\frac{\pi}{2}$
(۴) π

۹- دوره تناوب تابع مثلثاتی $f(x) = \tan ax - \cot ax$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است. a کدام می‌تواند باشد؟

(۱) $\frac{1}{2}$
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۴

۱۰- نمودار تابع $y = \tan(\pi + ax)$ به صورت زیر است. مقدار a کدام است؟



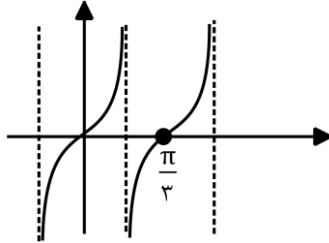
(۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) ۲
(۴) -۲



۱۱- نمودار تابع $y = \cot(\frac{\pi}{2} - 3x)$ ، در بازه $[0, \pi]$ ، از چند قطعه تشکیل شده است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۲- نمودار $y = \cotg(ax + \frac{\pi}{2})$ شکل مقابل است. مقدار a کدام است؟



- (۱) -۶ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۳- دوره‌ی تناوب تابع با ضابطه‌ی $y = \tan^3 2ax$ ، دو برابر دوره‌ی تناوب تابع با ضابطه‌ی $y = \sin^2(\frac{3x}{2})$ است. a کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۴- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$ ، آنگاه مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{8}{9}$ (۲) $-\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{8}{9}$

۱۵- اگر $\frac{3}{2} = \cos(x + \pi) - \sin(x - \frac{\pi}{2})$ باشد، مقدار $\cos 2x$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۶- اگر $\frac{1}{3} = \cos(x - \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \frac{3\pi}{2})$ باشد، حاصل $\cos 4x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{47}{81}$ (۲) $\frac{47}{81}$ (۳) $\frac{15}{36}$ (۴) $-\frac{15}{36}$



۱۷- مجموعه‌ی جواب کلی معادله‌ی $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin x + 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

۱۸- جواب کلی معادله‌ی $\cos^2 2x - \cos^4 2x = \sin^4\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{24}$ (۳) $\frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{12}$ (۴) $\frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{24}$

۱۹- جواب‌های معادله $2\cos^2 x = 1 + \sin x$ به صورت $2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است. مجموعه مقادیر i کدام است؟

- (۱) $\{1, 3, 5\}$ (۲) $\{7, 9, 11\}$ (۳) $\{3, 7, 11\}$ (۴) $\{1, 5, 9\}$

۲۰- مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^4 x = \sin^4 x - \cos^4 x$ ، در بازه $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) $\frac{7\pi}{2}$ (۳) $\frac{9\pi}{4}$ (۴) $\frac{11\pi}{4}$

۲۱- معادله‌ی مثلثاتی $\cos^3 x + \cos x = 0$ در بازه $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۲- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cos(x - \pi) = \sin^4\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{12}$

۲۳- جواب کلی معادله مثلثاتی $2\sin(\pi + x)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3\cot x \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$



۲۴- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$ ، کدام است؟

(۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

۲۵- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $(\sin x + \cos x)^2 = 1 - \sin(x - \frac{\pi}{4})$ ، کدام است؟

(۱) $k\pi + \frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

۲۶- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\cos^2 x - \sin^2 x = 1$ ، به کدام صورت است؟ ($K \in \mathbb{Z}$)

(۱) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۲۷- جواب کلی معادله مثلثاتی $3\sin(\pi + x)\cos(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \frac{\pi}{2})\cos(\pi + x) = 2$ ، به کدام صورت است؟

(۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

۲۸- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(x + \frac{\pi}{2}) = 1 - \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ کدام است؟

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۲) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

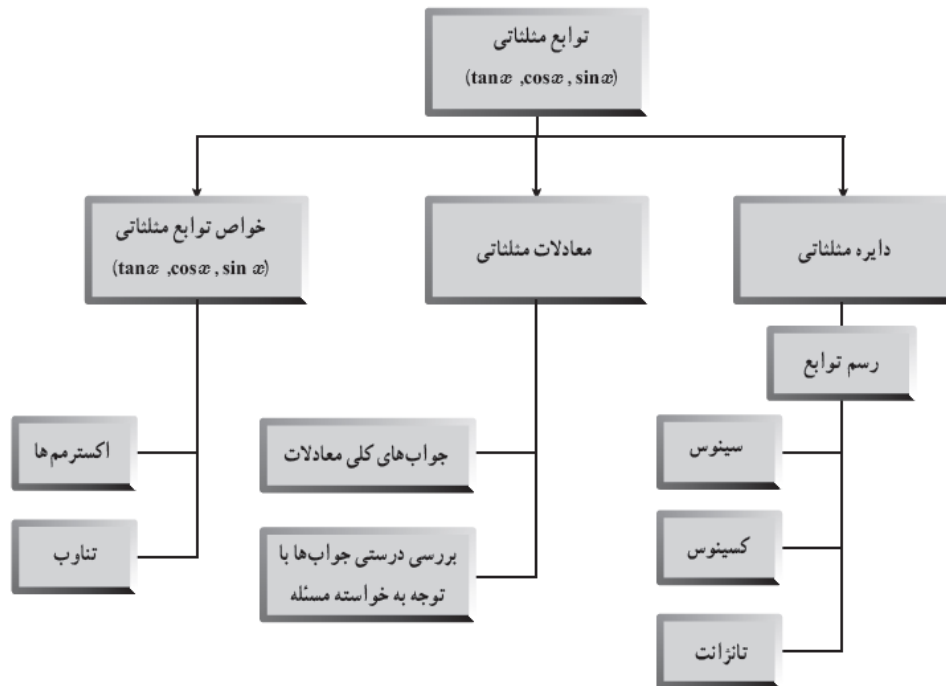
۲۹- مجموع جواب‌های معادله $2(\sin x + \cos x) = 1 + \sin^2 x$ در بازه‌ی $[0, \pi]$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{3\pi}{4}$ (۳) $\frac{5\pi}{4}$ (۴) $\frac{11\pi}{4}$

۳۰- جواب کلی معادله‌ی $\frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 2x - \cos^2 2x} = \frac{1}{2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$





درس اول: تناوب و تانژانت

مقادیر ماکزیمم و مینیمم، دوره تناوب و شکل تابع مثلثاتی در این قسمت از کتاب مورد بحث قرار گرفته است.

توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطه تابعی به صورت فوق می‌توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب یک تابع مثلثاتی، می‌توان ضابطه تابع مورد نظر را به دست آورد.
مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$

ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

پ) $y = \pi \sin(-x) + 1$

ت) $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

حل:

الف) $\max = |3| - 2 = 1$ $\min = -|3| - 2 = -5$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

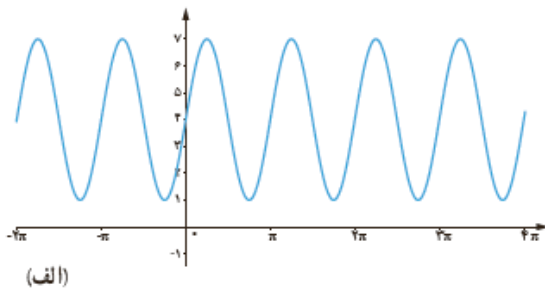
ب) $\max = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ $\min = -\left|-\frac{1}{4}\right| = -\frac{1}{4}$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

پ) $\max = |\pi| + 1 = \pi + 1$ $\min = -|\pi| + 1 = 1 - \pi$ $T = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

ت) $\max = |8| = 8$ $\min = -|8| = -8$ $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$



در این قسمت چند مثال از کتاب حسابان ۲ آورده شده است:

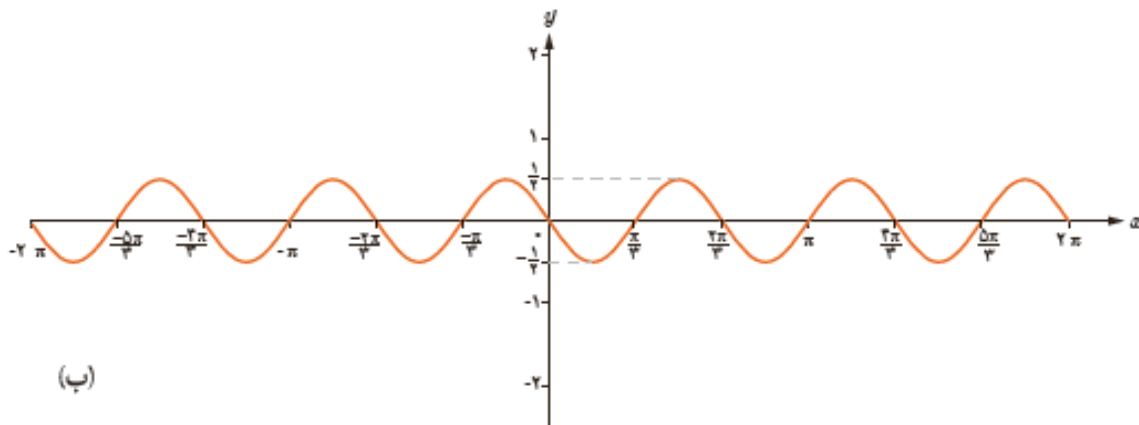


❖ **مثال:** هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \cos bx + c$ یا $f(x) = a \sin bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.

(الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و دوره تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$. از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطه تابع مورد نظر به صورت مقابل است:

$$y = 3 \sin(2x) + 4$$

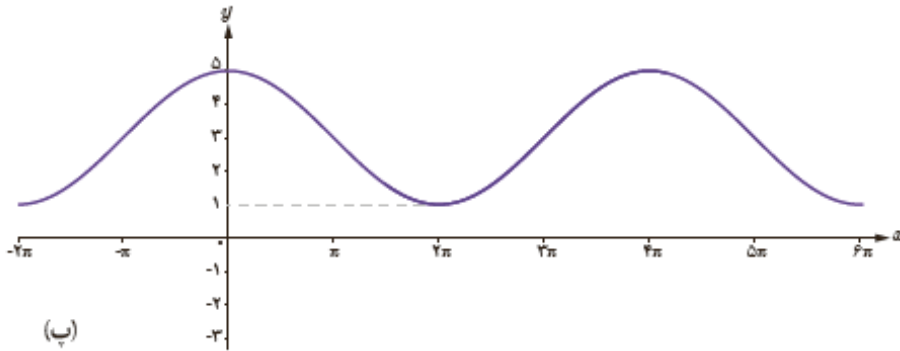


(ب) با توجه به نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{3}$ و $|b| = 3$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی (مثبت) و b مثبت (منفی) است. بنابراین داریم:

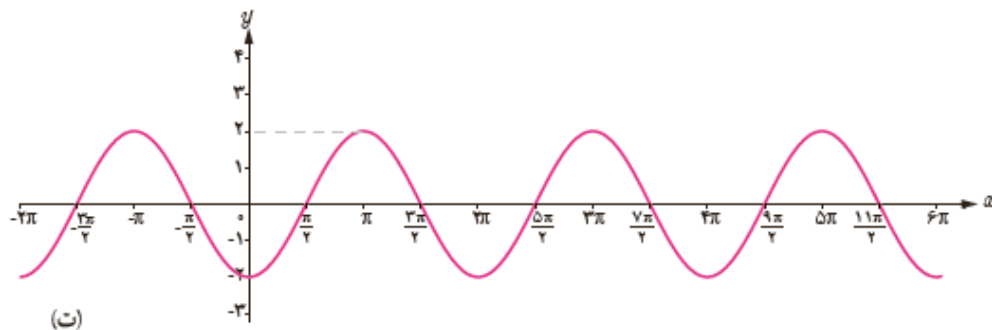
$$y = -\frac{1}{3} \sin 3x$$

(پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و دوره تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{4}$ و $|a| = 2$ لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{4}$ و بنابراین داریم: $y = 2 \cos(\frac{x}{4}) + 3$.





(ب) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و دوره تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{4}$ و $|a| = 2$ لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{4}$ و بنابراین داریم: $y = 2 \cos(\frac{x}{4}) + 3$.

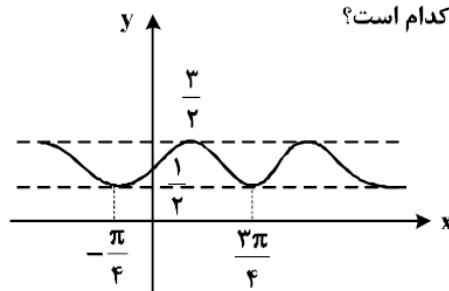


(ت) ضابطه این نمودار نیز می تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 2$ و $|b| = \frac{1}{4}$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم: $y = -2 \cos x$.

در این قسمت طراح کنکور به دنبال تشخیص میزان توانایی دانش آموزان در محاسبه دوره تناوب و ... است.

آزمون سراسری ریاضی ۹۸

۱۱۲- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟



۱ (۱)

۳/۲ (۲)

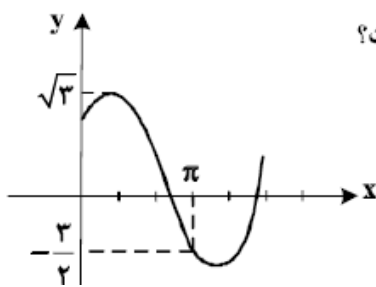
۲ (۳)

۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ صحیح است



آزمون سراسری تجربی ۹۸

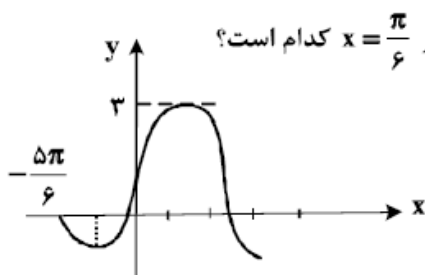


۱۳۵- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. کدام است b ؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $\sqrt{3}$
(۴) 2

پاسخ: گزینه ۳ صحیح است.

آزمون سراسری تجربی ۹۸ (خارج از کشور)



۱۳۵- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos(\frac{\pi}{6} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

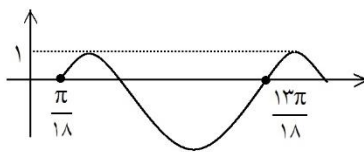
- (۱) $1/5$
(۲) 2
(۳) $2/5$
(۴) $1 + \sqrt{3}$

پاسخ گزینه ۲ صحیح است.

برای حل سوالات فوق از اعداد روی محور x ها دوره تناوب را بدست می‌آوریم و از روی محور y ها ضرایب تابع مثلثاتی واعدادی که با آنها جمع شده است. برای نمونه به حل زیر دقت کنید:

مثال:

قسمتی از نمودار $f(x) = a + 2 \sin bx$ شکل زیر است. مقدار $a + b^2$ چه عددی است؟



- (۱) ۱۰
(۲) ۸
(۳) ۴
(۴) ۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$T = \frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow \text{Max}(f) = 3 = 1$$

$$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 9 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow a + b^2 = 8$$



نمودار تابع تانژانت

نمودار تابع تانژانت به صورت زیر در آزمون سراسری تجربی ۱۳۸۷ مورد سوال قرار گرفته بود:

اگر $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ و تابع $g(x) = \tan x : |x| < \frac{\pi}{4}$ باشند. دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

(۱) $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ (۲) $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ (۳) $(-\frac{\pi}{4}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{4})$ (۴) $(-1, 0) \cup (0, 1)$

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. چون D_g داده شده پس می توان با تشکیل $f \circ g$ مستقیماً دامنه را از روی ضابطه به دست آورد.

$$f \circ g(x) = \frac{\sqrt{1 - \tan^2 x}}{\tan x}$$

$$\begin{cases} 1 - \tan^2 x \geq 0 \Rightarrow \tan^2 x \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \tan x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi \end{cases}$$

$$D_{f \circ g} = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] - \{0\}$$

در این سوال، پس از نوشتن تعریف دامنه تابع مرکب، به یک نامعادله می رسیدیم که باید مشخص کنیم که در چه محدوده ای تابع تانژانت بین ۱- و ۱ قرار می گیرد که این با آگاهی به نمودار تابع تانژانت امکان پذیر است.

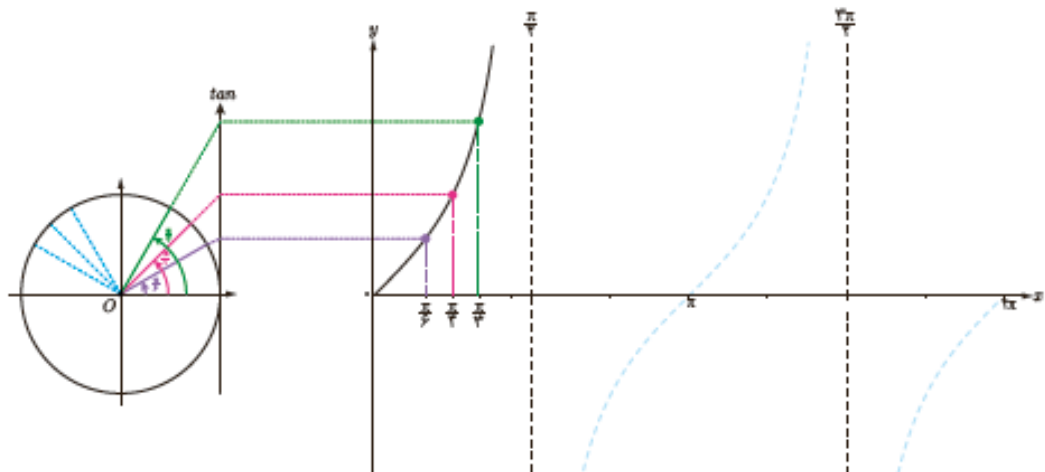
از طرفی، مساله دوره تناوب تابع تانژانت نیز به صورت زیر در کتاب مطرح شده است:

تابع تانژانت

همان طور که می بینیم به ازای هر زاویه دلخواه در دایره مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $k \in \mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan x$ داریم و تابعی با ضابطه $y = \tan x$ مشخص می کند. دامنه این تابع مجموعه $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می توان دید تابع $y = \tan x$ ، تابعی متناوب است و دوره تناوب آن π است، زیرا:

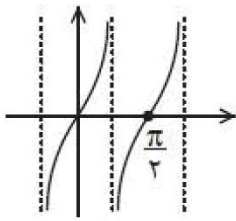
$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan x$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع های دیگر رسم کنید.



مثال:





نمودار $y = \text{Cotg}\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)$ شکل مقابل است. مقدار a کدام است؟

- (۱) -۴
- (۲) -۲
- (۳) ۲
- (۴) ۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = -\text{tg}(ax) = \text{tg}(-ax), T = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{-a} \Rightarrow a = -2$$

چون تابع صعودی است، پس $a < 0$ است.

این نکته به صورت زیر در آزمون سراسری ریاضی ۱۳۹۸ (خارج از کشور) مطرح شده بود:

۱۱۲- دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) π

در حل این سوال بایستی از نکته زیر استفاده کرد:

اگر مجموع یا تفاضل نسبتهای مثلثاتی تانژانت یا کتانژانت داده شد، بهترین راه این است که ابتدا آنها را برحسب سینوس و کسینوس بنویسیم و سپس مخرج مشترک بگیریم، سپس در صورت و مخرج کسر ترکیبهای بدست می آیند که قابل تبدیل به نسبتهای مثلثاتی دوبرابر زاویه است. برای مثال در سوال دوره تناوب آزمون سراسری ریاضی ۹۸ (خارج از کشور) با انجام این کار به نسبت مثلثاتی کتانژانت $2\pi x$ بدست می آید که دوره تناوب آن گزینه ۱ خواهد بود. و در نهایت اینکه، تابع تانژانت در هر زیر بازه ای که به طور کامل پیوسته باشد، اکیدا صعودی است اما به دلیل نقاطی که در دامنه تعریف آن قرار نمی گیرد، به طور کلی یک تابع غیر یکنوا می باشد.

صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در مجموعه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] - [0, 2\pi]$ بررسی کنید.





همایش دروس عمومی و اختصاصی

- ✓ همایش های ویژه ماز در تمامی دروس اختصاصی و عمومی (۹ درس)
- ✓ ویژه جمع بندی و مرور نزدیک به روز کنکور
- ✓ برگزاری توسط اساتید کلاس های اصلی و نکته و تست ماز
- ✓ تورق کتاب، نکته های پایانی، تکنیک آزمون کنکور
- ✓ پیش بینی سوالات کنکور
- ✓ شروع همایش ها از ۴ مرداد

در صورتی که برای ثبت نام محصولات ماز به راهنمایی نیاز دارید، عدد ۲۰ را به سامانه ۲۰۰۰۸۵۸۵ ارسال کنید.

درس دوم: معادلات مثلثاتی

نسبتهای مثلثاتی دوبرابر زاویه

چهار رابطه در مورد نسبتهای دوبرابر زاویه در کتاب آمده است که بسیار پر کاربرد است.

به طور کلی داریم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

در مورد نسبت مثلثاتی $\cos 2x$ به دلیل اینکه دو بسط متفاوت دارد که یکی با عدد یک و دیگری با عدد ۱- در کنار هم قرار گرفته اند، می توان زمانی که ترکیبی از عدد یک و تابع کسینوس داده می شود، چه به صورت جمع و چه به صورت تفریق، از یکی از این ترکیبها استفاده کرد و معادله را ساده کرد.

"عدد یک با تابع کسینوس واکنش می دهد."

مثال:

ساده شده عبارت $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ کدام است؟

(۱) $\tan \alpha$ (۲) $-\tan \alpha$ (۳) $-\cot \alpha$ (۴) $\cot \alpha$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ و $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

با استفاده از نکته ی بالا داریم:

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1 + 2 \cos^2 \alpha - 1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

البته این رابطه بیشتر در قالب کاربرد در حل معادلات یا نمودار استفاده می شود. برای مثال در سوال مربوط به معادله مثلثاتی در آزمون سراسری ریاضی ۹۸ از فرمول شماره یک استفاده می شود.

۱۱۳- مجموع جواب های معادله مثلثاتی $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} \sin 2x$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) $\frac{7\pi}{2}$ (۳) 2π (۴) 3π

پاسخ: گزینه ۱ صحیح است.

یا سوال معادله مثلثاتی سراسری تجربی ۹۸

۱۴۲- مجموع جواب های معادله مثلثاتی $4 \sin x \sin(\frac{3\pi}{4} - x) = 1$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) 3π (۳) 4π (۴) 5π

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است. در این سوال نیز موضوع تبدیل نسبت مثلثاتی سینوس دوبرابر زاویه کاربرد دارد.



مثال:

حاصل $\sin^2(75^\circ)$ چه قدر است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{4} \quad (2)$$

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \Rightarrow \sin^2(75^\circ) = \frac{1 - \cos(150^\circ)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

یکی از کاربردهای اتحادهایی که در سوال ۱۲ مطرح شد، محاسبه نسبت های مثلثاتی زوایایی است که دو برابر آنها به صورت زوایای شناخته شده در مثلثات در می آید.

مثال: مقدار $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را بیابید.

$$\cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

$$\sin 30^\circ = 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \cos 15^\circ$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cos 15^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

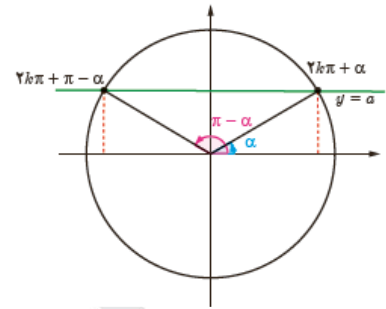
$$\cos 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$



معادله مثلثاتی سینوسی

در سوالات معادله مثلثاتی معمولاً ابتدا باید با استفاده از اتحادها یا تبدیل های مثلثاتی معادله را به فرم یک معادله با یک نسبت مثلثاتی بازنویسی کرد و در مرحله بعد جواب کلی معادله مثلثاتی را نوشت. در کتاب درسی در مورد ۲ معادله مثلثاتی بحث شده است. اول معادله مثلثاتی سینوسی: با توجه به دایره مثلثاتی زیر رابطه بین کمان معلوم α و کمان های مجهول x به طوری که $\sin x = \sin \alpha$ در دوران های مختلف به صورت زیر است:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$



جواب های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادله $\sin x = -\frac{1}{4}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{4}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

همانطور که در قسمت قبل توضیح داده شد، برای حل معادله مثلثاتی آزمون سراسری تجربی ۹۸ ابتدا با استفاده از فرمول شماره یک معادله ساده می شود و در نهایت به یک معادله سینوسی تبدیل می شود.

۱۴۲- مجموع جواب های معادله مثلثاتی $4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = 1$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

5π (۴)

4π (۳)

3π (۲)

$\frac{5\pi}{2}$ (۱)

$$4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = 1 \Rightarrow 4 \sin x (-\cos x) = 1 \Rightarrow -2(2 \sin x \cos x) = 1$$

$$\Rightarrow -2 \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x_2 = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

گزینه ۴ صحیح است که برای بدست آوردن مجموع جوابها، بایستی ابتدا جوابهایی که در این فاصله قرار می گیرند را بدست آوریم.



k	۰	۱	۲
x_1	$\times$	$\pi - \frac{\pi}{12}$	$2\pi - \frac{\pi}{12}$
x_2	$\frac{7\pi}{12}$	$\pi + \frac{7\pi}{12}$	$\times$

$$\text{مجموع} = \pi - \frac{\pi}{12} + 2\pi - \frac{\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} + \pi + \frac{7\pi}{12} = 4\pi + \pi = 5\pi$$

برای این قسمت مثال های زیر آورده شده است:

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

ب) $4\sin x + \sqrt{8} = 0$

مثال: معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

می دانیم که جواب های این معادله به شکل زیر هستند:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: معادله $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مجموع جواب های معادله $2\cos^2 x = 1 + \sin x$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

$\frac{5\pi}{2}$ (۴)

2π (۳)

$\frac{7\pi}{2}$ (۲)

π (۱)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2(1 - \sin^2 x) = 1 + \sin x \Rightarrow 2\sin x \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = -1, \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5\pi}{2}$$



مثال : جواب های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

$$2 \sin x \cos x = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

آزمون سراسری ریاضی ۹۸ (خارج از کشور)

۱۱۳- مجموع جواب های معادله مثلثاتی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

4π (۴)

$\frac{7\pi}{2}$ (۳)

3π (۲)

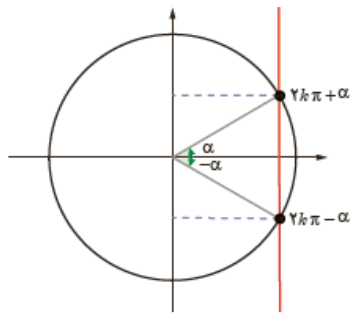
$\frac{5\pi}{2}$ (۱)

پاسخ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



معادله مثلثاتی کسینوسی

دومین معادله مثلثاتی که در کتاب مورد بحث قرار می گیرد، معادله کسینوسی است.



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = 2k\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{2}$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ پس معادله به صورت $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

مجموع جواب‌های معادله $2 \cos x = \sqrt{3}$ که در بازه $[-3\pi, \pi]$ قرار دارند، کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} (1) & -\frac{2\pi}{3} & (2) & -\frac{4\pi}{3} \\ (3) & -2\pi & (4) & -4\pi \end{array}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: جواب‌های معادله‌های کلی $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ است. ($k \in \mathbb{Z}$)

با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$2 \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{\cos \pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

با جای‌گذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت بالا نتیجه می‌شود که جواب‌های $\frac{\pi}{6}, \frac{-\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}$ و $2\pi - \frac{\pi}{6}$ از

معادله در بازه‌ی داده شده هستند که حاصل جمع آن‌ها برابر است با:

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - 2\pi + \frac{\pi}{6} - 2\pi - \frac{\pi}{6} = -4\pi$$



جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) \cos(x - 2\pi) = \sin^4\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۱) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۲) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۳) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{12} \quad (۴)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: اگر $\cos x = \cos a$ ، آن گاه: $x = 2k\pi \pm a$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \\ \cos(x - 2\pi) = \cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x \\ \sin\frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^4\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

با جای گذاری مقادیر بالا در معادله ی داده شده، داریم:

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

جواب های بالا را می توان به طور خلاصه، به صورت $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$) نمایش داد.

مثال: معادله $\cos x (2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به صورت $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$ می نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x = t$ می توان معادله فوق را به معادله درجه دوم

$2t^2 - 9t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب های این معادله $t = -\frac{1}{2}$ و $t = 5$ است. بنابراین جواب های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده

$\cos x = 5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به دست می آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب های معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$ را به دست می آوریم.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

آزمون سراسری رشته تجربی سال ۱۳۹۸ (خارج از کشور)

۱۴۲- جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ ، کدام است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۴) \quad k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۳) \quad k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۲) \quad \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

پاسخ گزینه ۲ صحیح است.



مثال: معادله $\sin x + \cos x = 1$ را در بازه $0 \leq x \leq 2\pi$ حل کنید.

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sin x = 1 - \cos x$$

$$\sin^2 x = (1 - \cos x)^2 \quad \text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.}$$

$$\sin^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x \quad \text{استفاده از رابطه } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$1 - \cos^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x$$

$$2\cos^2 x - 2\cos x = 0$$

$$2\cos x(\cos x - 1) = 0 \Rightarrow 2\cos x = 0 \quad \text{یا} \quad \cos x - 1 = 0$$

اکنون جواب‌های معادله‌های به دست آمده را در بازه $0 \leq x \leq 2\pi$ می‌یابیم:

$$2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi$$

از آنجا که در گام سوم از به توان رساندن استفاده کرده‌ایم باید جواب‌های به دست آمده فوق را در معادله گذاشته و درستی آنها را تحقیق کنیم (چرا؟). پس از بررسی معلوم می‌شود که $x = \frac{3\pi}{2}$ جواب معادله داده شده نیست و بنابراین غیرقابل قبول است اما $x = 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$ مقادیر به دست آمده جواب معادله در بازه داده شده هستند.

این مثال کتاب به صورت زیر تبدیل به سوال آزمون سراسری ریاضی ۹۸ شد:

۱۱۳- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{4} \sin 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

$$3\pi \quad (۴)$$

$$2\pi \quad (۳)$$

$$\frac{7\pi}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱ صحیح است.

در تمرین ۳ کتاب، ۶ معادله ارائه شده است که منبع خوبی برای سوالات آزمون سراسری می‌باشند. در مورد ب بایستی از تبدیل نسبت دو برابر به کسینوس استفاده کنیم و در موارد ت و ج از تبدیل نسبت دو برابر به سینوس استفاده می‌کنیم. برای حل مورد پ که در آزمون سراسری تجربی ۹۸ خارج از کشور مشابه آن ارائه شده بود، هم می‌توان از تبدیل نسبت دو برابر به کسینوس استفاده کرد و هم از حل معادله کسینوسی به طور مستقیم.



۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{4} = \sin 3x$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

پ) $\cos x = \cos 2x$

ت) $\cos 2x - 3 \sin x + 1 = 0$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

۴ مثلی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

مثال

معادله ی $\sin 2x + \cos(\pi + x) = 0$ در بازه ی $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \cos(\pi + x) = -\cos x$$

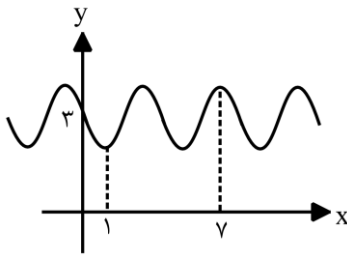
$$\sin 2x + \cos(\pi + x) = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 & \xrightarrow{x \in (0, 2\pi)} x = \frac{\pi}{2} \quad x = \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} & \xrightarrow{x \in (0, 2\pi)} x = \frac{\pi}{6} \quad x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

بنابراین جواب معادله در بازه ی $(0, 2\pi)$ چهار جواب دارد.



۱- شکل رو به رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ می باشد، حاصل ab کدام است؟



(۲) -۲

(۱) ۲

(۴) $-\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{3}{2}$

جواب: گزینه ۴

نکته: دوره تناوب $y = \alpha + \beta \sin(ax)$ و $y = \alpha + \beta \cos(ax)$ برابر است با:
 $T = \frac{2\pi}{|a|}$
 با توجه به شکل، نمودار از نقطه $(0, 3)$ عبور می کند، پس:
 $f(0) = 3 \Rightarrow a = 3$ (*)

همچنین با توجه به شکل، فاصله ۱ تا ۷ یک و نیم برابر دوره تناوب $(\frac{3}{2}T)$ تابع است، پس:

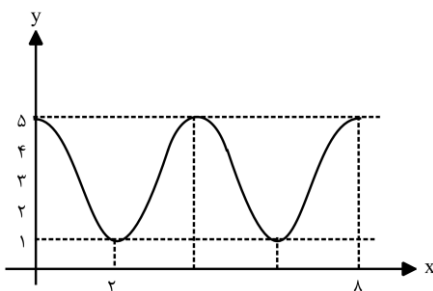
$$\frac{3}{2}T = 7 - 1 = 6 \Rightarrow T = 4 \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

چون نمودار تابع در $x = 0$ نزولی است، پس تنها $b = -\frac{1}{2}$ قابل قبول است (**)

$$ab = -\frac{3}{2}$$

از (*) و (**) داریم:

۲- نمودار منحنی $f(x) = a \cos b\pi x + c$ مطابق شکل زیر است. $f(\frac{16}{3})$ کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) $3 - \sqrt{3}$

(۴) $3 + \sqrt{3}$

جواب: گزینه ۱

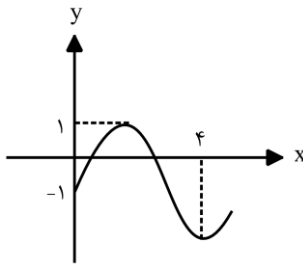
در نقطه $x = 0$ ، $\cos b\pi x = 1$ است. $a + c = 5$ و برد تابع $[1, 5]$ به طول ۴ واحد است در نتیجه ضریب تابع کسینوسی باید برابر ۲ باشد که این بازه برای برد آن بدست آید. در نتیجه: $c = 3$ و $a = 2$.
 طبق نمودار فاصله‌ی $x = 0$ تا $x = 2$ ، برابر نصف دوره‌ی تناوب تابع مورد نظر است:

$$2 - 0 = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 4 \Rightarrow \text{دوره تناوب} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 \cos(\pm \frac{\pi x}{2}) + 3 \rightarrow f(\frac{16}{3}) = 2 \cos(\pm \frac{8\pi}{3}) + 3 = -1 + 3 = 2$$



۳- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin b\pi x - 1$ است. مقدار $a \times b$ کدام است؟

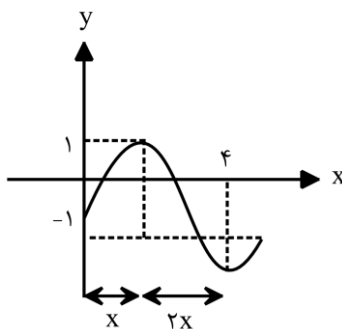


(۱) $-\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{3}{4}$

(۲) $-\frac{3}{4}$
(۴) $\frac{3}{2}$

جواب: گزینه ۳

با توجه به شکل از مبدا مختصات تا نقطه به طول ۴ روی محور طولها، سه قسمت از چهار تکه لازم برای یک دوره تناوب کامل رسم شده است. در نتیجه اگر دوره‌ی تناوب تابع برابر $4x$ باشد. $3x = 4$ شده است، پس $x = \frac{4}{3}$ به دست می‌آید. بنابراین دوره‌ی تناوب تابع $T = 4x = \frac{16}{3}$ خواهد بود. از ضابطه‌ی تابع دوره‌ی تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b\pi|}$ به دست می‌آید:



$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = \frac{16}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{8} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{8} \\ b = -\frac{3}{8} \end{cases} \quad \text{یا}$$

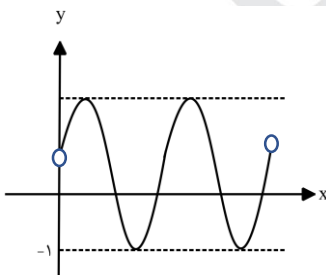
$$y\left(\frac{4}{3}\right) = a \sin \frac{\pi}{2} - 1 = 1 \Rightarrow a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

اگر $b = \frac{3}{8}$ باشد، مقدار تابع در $x = \frac{3}{4}$ برابر ۱ است:

$$a \times b = 2 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

اگر $b = -\frac{3}{8}$ باشد به طور مشابه $a = -2$ به دست می‌آید که $a \times b = \frac{3}{4}$ می‌شود.

۴- شکل زیر نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + a \sin(b\pi x)$ در بازه $(0, \frac{2}{3})$ است. $a \times b$ کدام است؟



(۱) ۳
(۲) -۳
(۳) ۹
(۴) -۹





گروه آموزشی ماز

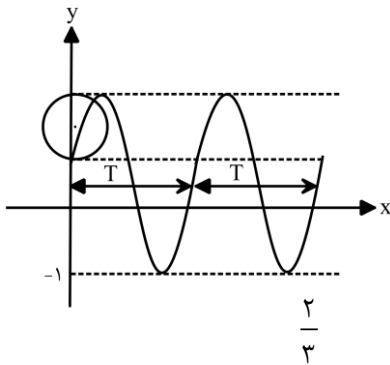
ثبت نام سال تحصیلی

۱۴۰۰-۱۳۹۹ آغاز شد

ثبت نام از طریق مراجعه به سایت
biomaze.org



جواب: گزینه ۳

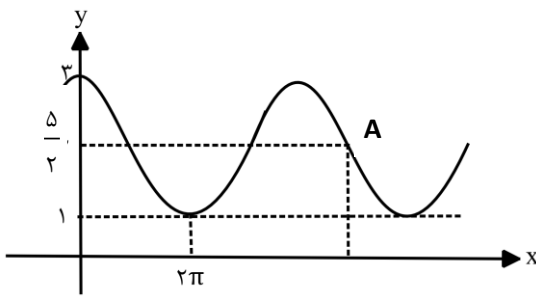


$$\left. \begin{aligned} 2T = \frac{2}{3} &\Rightarrow T = \frac{1}{3} \\ T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |b| = 6$$

وقتی تابع سینوسی در همسایگی محور yها حالت صعودی دارد، باید حاصلضرب ضریب متغیر در ضریب تابع سینوسی مثبت باشد. یعنی داریم: $a \times b > 0$
در نتیجه گزینه ۲ و ۴ حذف می شود.

$$\min = \frac{1}{3} - |a| = -1 \Rightarrow |a| = \frac{4}{3} \Rightarrow a \times b = \frac{4}{3} \times 6 = 8$$

۵- نمودار تابع $y = a \cos bx + c$ به صورت زیر است. طول نقطه‌ی A کدام است؟



$$\frac{13\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{25\pi}{6} \quad (1)$$

$$\frac{29\pi}{6} \quad (4)$$

$$\frac{14\pi}{3} \quad (3)$$

جواب: گزینه ۳

با توجه به برد تابع که ۲ واحد است و نزولی بودن آن در همسایگی راست عدد صفر، ضریب تابع کسینوس برابر ۱ است. و چون بیشترین مقدار آن برابر ۳ می باشد یعنی عدد ثابت سوال ۲ بوده است. همچنین نصف دوره تناوب تابع برابر 2π است بنابراین داریم:

$$c = \frac{3+1}{2} = 2, T = 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}, f(0) = 3 \Rightarrow a + c = 3 \Rightarrow a = 1$$

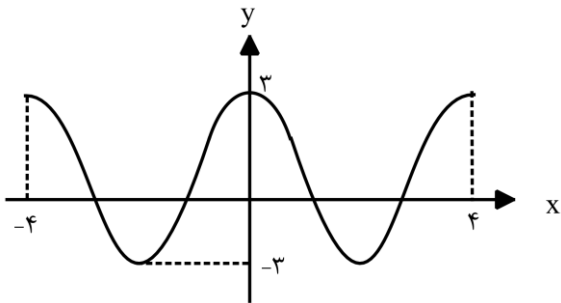
بنابراین $y = \cos \frac{1}{2}x + 2$ می باشد.

$$y = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos \frac{1}{2}x + 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}$$

پس طول نقطه‌ی A برابر $\frac{14\pi}{3}$ است.



۶- اگر نمودار زیر قسمتی از تابع $f(x) = a \sin(\pi(\frac{1}{2} - bx))$ باشد، حاصل ab کدام است؟ ($b < 0$)



(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) $-\frac{3}{2}$

(۴) $\frac{3}{4}$

(۳) $-\frac{3}{4}$

جواب: گزینه ۱

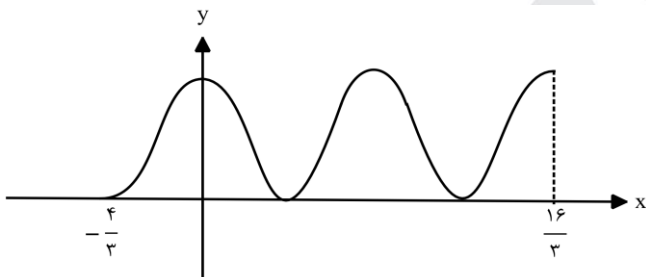
اولا که $\sin(\pi(\frac{1}{2} - bx))$ همان $\sin(\frac{\pi}{2} - \pi bx)$ یعنی $\cos(\pi bx)$ است، پس تابع به صورت $f(x) = a \cos(\pi bx)$ است. حالا داریم:

$$f(0) = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|\pi b|} = \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{b < 0} b = -\frac{1}{2}$$

پس $ab = -\frac{3}{2}$ است.

۷- شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = 4 + a \cos(b\pi x)$ است.



حاصل $(a + 2b)$ کدام گزینه می تواند باشد؟

(۲) ۱

(۱) -۱

(۴) ۲

(۳) -۲

جواب: گزینه ۲

یادآوری: دوره ی تناوب تابع $y = \cos kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ است.

از روی نمودار تابع مشاهده می کنیم که، نمودار داده شده در باره ی $[-\frac{4}{3}, \frac{16}{3}]$ به تعداد $2/5$ مرتبه تکرار شده است.

لذا اگر دوره ی تناوب این تابع را T فرض کنیم داریم:

$$2/5 T = \frac{16}{3} - (-\frac{4}{3}) \Rightarrow 2/5 T = \frac{20}{3} \Rightarrow T = \frac{10}{3}$$

$$y = \cos(b\pi x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{10}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{5}$$



همچنین از روی نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که $f(-\frac{4}{3}) = 0$ است، لذا:

$$\xrightarrow{(2)} f(-\frac{4}{3}) = 4 + a \cos((\pm \frac{3}{4})\pi \times (-\frac{4}{3})) = 4 + a \cos(\pm \pi) = 4 - a = 0$$

$$\Rightarrow a = 4 \Rightarrow a + 2b = 4 + 4(\pm \frac{3}{4}) = 4 \pm 3 = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

۸- کوچکترین دوره‌ی تناوب تابع $y = |\sin 4x| + |\cos 4x|$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

جواب: گزینه ۱

$$T = \frac{\pi}{8}$$

نکته‌ی درسی: دور تناوب تابع $\sin 4x$ برابر با $\frac{\pi}{4}$ است و اگر در قدر مطلق قرار گیرد برابر با $\frac{\pi}{4}$ است. اما در این سوال به دلیل اینکه به فرمی که مشاهده می‌کنید با تابع $\cos 4x$ جمع شده است، در نتیجه دوره تناوب آن نصف این مقدار می‌شود. به طور خلاصه داریم:

$$y = |\sin kx| + |\cos kx| \rightarrow T = \frac{\pi}{|2k|}$$

۹- دوره تناوب تابع مثلثاتی $f(x) = \operatorname{tg} ax - \operatorname{Cotg} ax$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است. a کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

جواب: گزینه ۲

یادآوری: الف) $\operatorname{Cotg}(u) - \operatorname{tg}(u) = 2\operatorname{Cotg}(2u)$

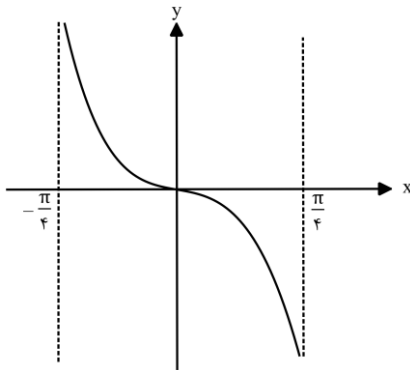
ب) دوره تناوب $\operatorname{Cotg}(mx)$ برابر $\frac{\pi}{|m|}$ است. پس:

$$f(x) = \operatorname{tg}(ax) - \operatorname{Cotg}(ax) = -(\operatorname{Cotg}(ax) - \operatorname{tg}(ax)) = -2\operatorname{Cotg}(2ax) \Rightarrow T = \frac{\pi}{|2a|}$$

$$T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{|2a|} \Rightarrow |2a| = 2 \Rightarrow 2|a| = 2 \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$



۱۰- نمودار تابع $y = \tan(\pi + ax)$ به صورت زیر است. مقدار a کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) ۲
(۴) -۲

جواب: گزینه ۴

نکته: $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$

با توجه به نکته داریم: $y = \tan(\pi + ax) = \tan ax$ ، نمودار $y = \tan x$ بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ رسم می‌شود و نمودار داده شده بین $\frac{\pi}{4}$

و $-\frac{\pi}{4}$ است. پس ضابطه‌ی آن به صورت $y = \pm \tan 2x$ است و $a = \pm 2$.

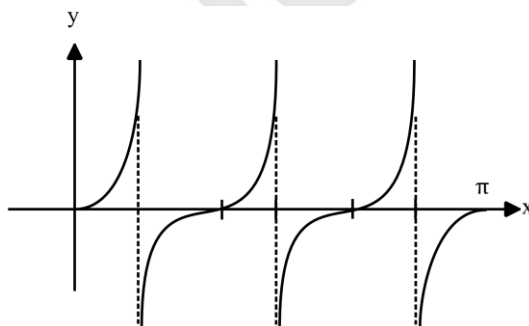
همچنین می‌دانیم نمودار $y = \tan x$ در بازه‌هایی که تعریف می‌شود اکیداً صعودی است. نمودار داده شده اکیداً نزولی است، پس مقدار a منفی است. بنابراین $a = -2$.

۱۱- نمودار تابع $y = \cot(\frac{\pi}{2} - 3x)$ ، در بازه $[0, \pi]$ ، از چند قطعه تشکیل شده است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

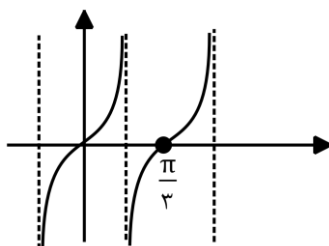
جواب: گزینه ۲

دوره تناوب $\tan 3x$ برابر $\frac{\pi}{3}$ است.



با توجه به شکل از ۴ قطعه تشکیل شده است.

۱۲- نمودار $y = \cotg(ax + \frac{\pi}{2})$ شکل مقابل است. مقدار a کدام است؟



- (۱) -۶
(۲) -۳
(۳) ۳
(۴) ۶



جواب: گزینه ۲

با توجه به شکل فاصله بین دو نقطه با مقدار برابر در تابع تانژانتی داده شده برابر $\frac{\pi}{3}$ است. و تابع تانژانت به فرم صعودی است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$y = -tg(ax) = tg(-ax), T = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{-a} \Rightarrow a = -3$$

چون تابع صعودی است، پس $a < 0$ است.

۱۳- دوره‌ی تناوب تابع با ضابطه‌ی $y = \tan^3 2ax$ ، دو برابر دوره‌ی تناوب تابع با ضابطه‌ی $y = \sin^2(\frac{3x}{2})$ است. a کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{3}{8}$ (۱)

جواب: گزینه ۱

دوره تناوب تابع $y = \tan^3 2ax$ بصورت $T_1 = \frac{\pi}{2|a|}$ می‌باشد و برای دوره تناوب تابع $y = \sin^2(\frac{3x}{2})$ از فرمول آن داریم:

$$T = \frac{\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{3}$$

که دوره تناوب تابع فوق همان دوره تناوب $\cos^3 x$ می‌باشد، پس $T_1 = \frac{2\pi}{|3|}$ می‌باشد. طبق فرض سوال داریم:

$$T_1 = 2T_2 \Rightarrow \frac{\pi}{2|a|} = 2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow |a| = \frac{3}{8} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{8} \\ a = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

۱۴- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$ ، آنگاه مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ کدام است؟

$\frac{8}{9}$ (۴)

$\frac{4}{9}$ (۳)

$-\frac{4}{9}$ (۲)

$-\frac{8}{9}$ (۱)

جواب: گزینه ۱

توجه کنید که:

$$\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha) = \cos(2\pi - (\frac{\pi}{2} + 2\alpha)) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2\alpha) = -\sin 2\alpha$$



برای محاسبه $-\sin 2\alpha$ ، طرفین تساوی $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{9}$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha &= \frac{1}{9} \\ \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha &= \frac{1}{9} \Rightarrow -\sin 2\alpha = -\frac{8}{9}\end{aligned}$$

۱۵- اگر $\frac{3}{2} = \cos(x + \pi) - \sin(x - \frac{\pi}{2})$ باشد، مقدار $\cos 2x$ ، کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{array} \quad \begin{array}{l} (۴) \\ (۳) \\ (۲) \\ (۱) \end{array}$$

جواب: گزینه ۳

$$3 \cos(x + \pi) - \sin(x - \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2} \Rightarrow -3 \cos x + \cos x = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{3}{4}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2(-\frac{3}{4})^2 - 1 = \frac{1}{8}$$

۱۶- اگر $\frac{1}{3} = \cos(x - \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \frac{3\pi}{2})$ باشد، حاصل $\cos 4x$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} -\frac{15}{36} & \frac{15}{36} & \frac{47}{81} & -\frac{47}{81} \end{array} \quad \begin{array}{l} (۴) \\ (۳) \\ (۲) \\ (۱) \end{array}$$

جواب: گزینه ۱

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x - \cos x = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow 1 - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 2(\sin x \cos x) = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{9} (*)$$

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2(\frac{4}{9})^2 = 1 - \frac{32}{81} = \frac{49}{81}$$



۱۷- مجموعه‌ی جواب کلی معادله‌ی $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin x + 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

جواب: گزینه ۳

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin x + 1 = 0$$

$$2\cos^2 x + \sin x + 1 = 0 \Rightarrow 2(1 - \sin^2 x) + \sin x + 1 = 0 \Rightarrow 2 - 2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$$

$$2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} & \text{ق ق} \\ \sin x = \frac{3}{2} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۱۸- جواب کلی معادله‌ی $\cos^2 2x - \cos^4 2x = \sin^4\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{24}$ (۳) $\frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{12}$ (۴) $\frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{24}$

جواب: گزینه ۴

ابتدا معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\cos^2 2x(1 - \cos^2 2x) = \cos^2 2x \sin^2 2x = \left(\frac{1}{2} \sin 4x\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \sin^2 4x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 4x = 1$$

$$\Rightarrow \sin 4x = \pm 1$$

$$\Rightarrow 4x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{24}$$

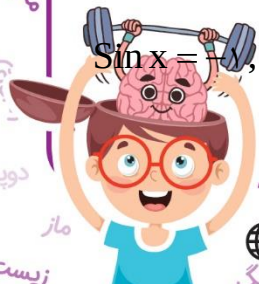
۱۹- جواب‌های معادله $2\cos^2 x = 1 + \sin x$ به صورت $2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است. مجموعه مقادیر i کدام است؟

- (۱) $\{1, 3, 5\}$ (۲) $\{7, 9, 11\}$ (۳) $\{3, 7, 11\}$ (۴) $\{1, 5, 9\}$

جواب: گزینه ۴

$$2(1 - \sin^2 x) = 1 + \sin x \Rightarrow 2\sin x \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6} \Rightarrow i = \{1, 5, 9\}$$



۲۰- مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$ ، در بازه $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ برابر کدام است؟

$$\frac{11\pi}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{9\pi}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{7\pi}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad (۱)$$

جواب: گزینه ۲

$$\sin^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x \Rightarrow \sin^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x \cos^2 x = -\cos^2 x \Rightarrow 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x (2\sin^2 x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos^2 x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \\ \sin^2 x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \frac{42\pi}{12} = \frac{7\pi}{2}$$

۲۱- معادله‌ی مثلثاتی $\cos^3 x + \cos x = 0$ در بازه $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$ چند جواب دارد؟

$$۶ \quad (۴)$$

$$۵ \quad (۳)$$

$$۴ \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۱)$$

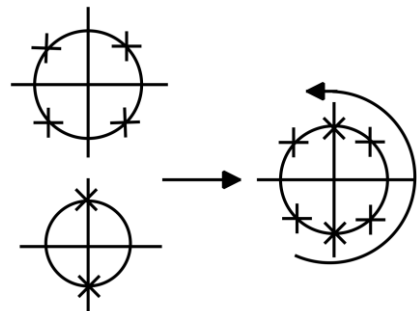
جواب: گزینه ۳

روش اول:

$$\cos^3 x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos^3 x = -\cos x \Rightarrow \cos^3 x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 3x = 2k\pi \pm (\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



روش دوم: (این فرمول در کتاب نیست. این روش خارج از محدوده کتاب درسی بیان شده است اما سوال مشابه یکی از تمرین های کتاب درسی است.)

$$** \cos^3 x = 4 \cos^3 x - \cos x$$

$$\cos^3 x + \cos x = 0 \Rightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 0 \Rightarrow 4 \cos^3 x - 2 \cos x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos x (2 \cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \rightarrow \text{جواب ۲} \\ 2 \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\pm \sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{جواب ۳} \end{array} \right\} \text{ جواب ۵}$$

۲۲- جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin(\frac{3\pi}{4} + x) \cos(x - \pi) = \sin^4(\frac{3\pi}{4})$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$k\pi \pm \frac{\pi}{12} \quad (۴) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۳) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۲) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

جواب: گزینه ۲

نکته: اگر $\cos x = \cos a$ ، آنگاه: $x = 2k\pi \pm a$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\frac{3\pi}{4} + x) = \sin(2\pi - \frac{\pi}{4} + x) = \sin(-\frac{\pi}{4} + x) = -\cos x \\ \cos(x - \pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin \frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^4(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

با جایگذاری مقادیر بالا در معادله ی داده شده، داریم:

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{array} \right.$$

جواب های بالا را می توان به طور خلاصه، به صورت $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$) نمایش داد.

۲۳- جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin(\pi + x) \cos(\frac{3\pi}{4} + x) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟

$$2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (۲) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۱) \\ 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۴) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۳)$$

جواب: گزینه ۴



$$2(-\sin x)(\sin x) + 3 \frac{\cos x}{\sin x}(-\sin x) = -2\sin^2 x - 3\cos x = -2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ \cos x = 2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۲۴- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$ ، کدام است؟

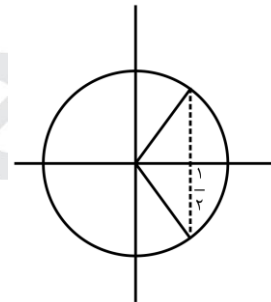
$$(1) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (2) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \quad (4) \quad k\pi - \frac{\pi}{3}$$

جواب: گزینه ۲

$$2\sin^2 x - 3\cos x = 2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 2 - 2\cos^2 x - 3\cos x = 0$$

$$\rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25 \quad \cos x = \frac{-3 \pm 5}{4} = -2, \left[\frac{1}{2} \right] \quad \begin{matrix} \text{ق ق} \\ \downarrow \\ \text{غ ق ق} \end{matrix}$$



$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۲۵- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $(\sin x + \cos x)^2 = 1 - \sin(x - \frac{\pi}{4})$ ، کدام است؟

$$(1) \quad k\pi + \frac{3\pi}{4} \quad (2) \quad \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \quad (3) \quad \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \quad (4) \quad 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$$

جواب: گزینه ۳

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin(\frac{\pi}{4} - x) \Rightarrow 1 + 2\sin x \cos x = 1 + \sin(\frac{\pi}{4} - x) \Rightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$$

$$\rightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{4} - x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \quad (1) \\ 2x = 2k\pi + \pi + x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \cup (2) : x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$



۲۶- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\cos^2 x - \sin^2 x = 1$ ، به کدام صورت است؟ ($K \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{array}{ll} (۱) \quad k\pi - \frac{\pi}{8} & (۲) \quad \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \\ (۳) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} & (۴) \quad k\pi + \frac{\pi}{8} \end{array}$$

جواب: گزینه ۳

نکته: $\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$$\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \sin^2 x = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \rightarrow \neq \end{cases}$$

۲۷- جواب کلی معادله مثلثاتی $3\sin(\pi + x)\cos(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \frac{\pi}{2})\cos(\pi + x) = 2$ ، به کدام صورت است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) \quad k\pi - \frac{\pi}{3} & (۲) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} & (۳) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} & (۴) \quad k\pi + \frac{\pi}{3} \end{array}$$

جواب: گزینه ۲

$$3\sin(\pi + x)\cos(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \frac{\pi}{2})\cos(\pi + x) = 2 \Rightarrow$$

$$3(-\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(-\cos x) = 2 \Rightarrow$$

$$3\sin^2 x - \cos^2 x = 2 \Rightarrow 3(1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 2 \Rightarrow 4\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۲۸- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(x + \frac{\pi}{2}) = 1 - \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) \quad k\pi + \frac{\pi}{2} & (۲) \quad 2k\pi - \frac{\pi}{4} & (۳) \quad 2k\pi - \frac{\pi}{2} & (۴) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array}$$



جواب: گزینه ۳

$$\cos x - \sin x = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

۲۹- مجموع جواب‌های معادله $2(\sin x + \cos x) = 1 + \sin 2x$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

$$\frac{\pi}{2} \quad (1) \quad \frac{3\pi}{4} \quad (2) \quad \frac{5\pi}{4} \quad (3) \quad \frac{11\pi}{4} \quad (4)$$

جواب: گزینه ۲

اگر در سمت راست تساوی به جای ۱ از اتحاد اول مثلثاتی استفاده کنیم، داریم:

$$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2$$

$$2(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2 \Rightarrow (\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\cos x \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \\ \neq \rightarrow \end{cases} \left\{ \frac{3\pi}{4} \right\}$$

فاقد جواب

۳۰- جواب کلی معادله $\frac{\sin 2x \cos 2x}{\sin^2 2x - \cos^2 2x} = \frac{1}{2}$ کدام است؟

$$\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16} \quad (1) \quad \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16} \quad (4)$$

جواب: گزینه ۱

$$\text{نکته: } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha, \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

ابتدا طرفین معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin 2x \cos 2x}{-(\cos^2 2x - \sin^2 2x)} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin 4x}{-\cos 4x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 4x = -\sin(4x) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$4x = 2k\pi - \left(4x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 8x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$$



برای اولین بار در کشور، مصاحبه با تمام رتبه های زیر صد
کنکور سال گذشته و منابعی که استفاده می کردند

...برای مشاهده کلیک کنید...

تک رقمی های کنکور تجربی ۹۸ از چه تاریخی مازی بودند؟

امیرضا بسکابادی	رتبه ۶	۱۳۹۲/۱۰/۰۵	ایزد مهر احمدی نژاد	رتبه ۱	۱۳۹۲/۰۲/۰۷
گلسمصباحی	رتبه ۷	۱۳۹۵/۰۷/۰۳	محسن راستکار	رتبه ۲	۱۳۹۸/۰۲/۲۱
ریحانه فرخی	رتبه ۸	۱۳۹۲/۰۸/۱۵	فرهنگ امیری	رتبه ۳	۱۳۹۲/۰۶/۰۹
سیاوش کیانپور	رتبه ۹	۱۳۹۲/۰۷/۱۸	رسا ظفری	رتبه ۴	۱۳۹۲/۱۰/۱۸
سید مهدی زارع زاده	رتبه ۱۰	۱۳۹۲/۱۱/۲۱	محمد رضا ارشد صوفیانی	رتبه ۵	۱۳۹۲/۰۵/۲۰
امیر حسام زارع	رتبه ۱۰	۱۳۹۶/۰۶/۰۲			

 www.biomaze.ir



#ماز_به_کسی_نگو!

  @biomaze

در صورتی که برای ثبت نام محصولات ماز به راهنمایی نیاز دارید، عدد ۲۰ را به سامانه ۰۸۵۸۵۰۰۰ ارسال کنید.